

PERSAMAAN DIFFERENSIAL PARSIAL

Formulasi matematik dari kebanyakan permasalahan dalam ilmu pengetahuan dan teknologi dapat dipresentasikan dalam bentuk persamaan differensial parsial. Persamaan tersebut merupakan laju perubahan terhadap dua atau lebih variable bebas yang biasanya adalah waktu dan jarak (ruang).

Persamaan differensial dapat dibedakan menjadi tiga jenis yaitu :

A. Persamaan Differensial Parabolik

- ➔ Biasanya merupakan persamaan yang tergantung pada waktu (tidak permanen) dan penyelesaiannya memerlukan kondisi awal dan batas. Persamaan parabolik paling sederhana adalah perambatan panas.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Penyelesaian dari persamaan di atas adalah mencari temperatur T untuk nilai x pada setiap waktu t.

B. Persamaan Differensial Eliptik

- ➔ Biasanya berhubungan dengan masalah kesetimbangan atau kondisi permanen (tidak tergantung waktu) dan penyelesaiannya memerlukan kondisi batas di sekeliling daerah tinjauan. Seperti aliran air tanah di bawah bendungan dan karena adanya pemompaan, defleksi plat akibat pembebanan, dsb.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

C. Persamaan Differensial Hiperbolik

- ➔ Biasanya berhubungan dengan getaran atau permasalahan dimana terjadi diskontinue dalam waktu, seperti gelombang kejut yang terjadi discontinue dalam kecepatan, tekanan dan rapat massa.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

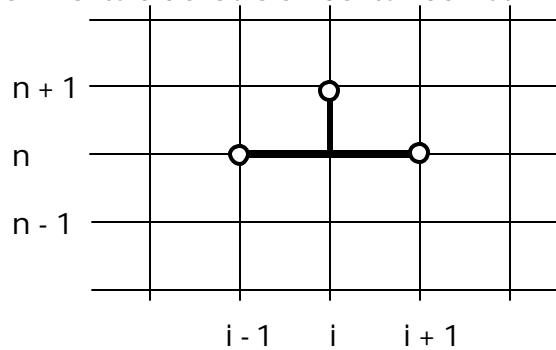
1. Penyelesaian Persamaan Parabolik dengan Skema Eksplisit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \dots\dots\dots (6.1)$$

dengan :

- T = temperatur
- K = koefisien konduktivitas
- t = waktu
- x = jarak

Pada skema eksplisit, variabel pada waktu $n+1$ dihitung berdasarkan variabel pada waktu n yang sudah diketahui. Dengan menggunakan skema seperti di bawah ini, fungsi $f(x,t)$ dan turunannya dalam ruang dan waktu didekati oleh bentuk berikut :



$$f(x, t) = f_i^n$$

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = \frac{f_{i-1}^n - 2f_i^n + f_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

Dari skema di atas, persamaan (6.1) dapat ditulis dalam bentuk berikut :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = K_i \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

atau

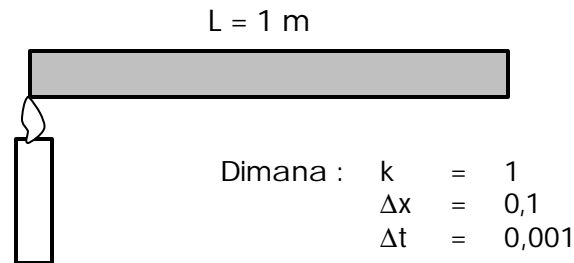
$$T_i^{n+1} = T_i^n + K_i \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n) \dots\dots\dots (6.2)$$

Stabilitas Skema Eksplisit

Dalam skema eksplisit, T_i^n tergantung pada tiga titik sebelumnya yaitu: T_{i-1}^{n-1} , T_i^{n-1} dan T_{i+1}^{n-1} . Keadaan ini dapat menyebabkan ketidakstabilan dari skema tersebut, yang berupa terjadinya amplifikasi hasil hitungan dari kondisi awal. Agar stabil dibutuhkan suatu syarat yaitu :

$$0 < \pi < \frac{1}{2} \text{ dengan } \pi = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

Contoh:



$$\pi = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{0,001}{0,1^2} = 0,1 < 0,5 \text{ (stabil)}$$

Syarat batas : pada $t = 0$; $T = 2x$; $0 \leq x \leq \frac{1}{2}L$
 $T = 2(1-x)$; $\frac{1}{2}L \leq x \leq L$

Dengan menggunakan persamaan (6.2), hitungan dilakukan dari $i = 2$ sampai dengan 5 dan dari $n = 1$ sampai waktu yang dikehendaki (N). Untuk $n = 1$ dan i bergerak dari $i = 2$ sampai $i = 6$,

$$\begin{aligned} T_2^1 &= 0,2 + 1 \cdot 0,1 \cdot (0 - 2 \cdot 0,2 + 0,4) = 0,2 \\ T_3^1 &= 0,4 + 1 \cdot 0,1 \cdot (0,2 - 2 \cdot 0,4 + 0,6) = 0,4 \\ T_4^1 &= 0,6 + 1 \cdot 0,1 \cdot (0,4 - 2 \cdot 0,6 + 0,8) = 0,6 \\ T_5^1 &= 0,8 + 1 \cdot 0,1 \cdot (0,6 - 2 \cdot 0,8 + 1) = 0,8 \\ T_6^1 &= 1 + 1 \cdot 0,1 \cdot (0,8 - 2 \cdot 1 + 0,8) = 0,96 \end{aligned}$$

untuk $n = 2$ dan i bergerak dari $i = 2$ sampai $i = 6$,

$$\begin{aligned} T_2^2 &= 0,2 + 1 \cdot 0,1 \cdot (0 - 2 \cdot 0,2 + 0,4) = 0,2 \\ T_3^2 &= 0,4 + 1 \cdot 0,1 \cdot (0,2 - 2 \cdot 0,4 + 0,6) = 0,4 \\ T_4^2 &= 0,6 + 1 \cdot 0,1 \cdot (0,4 - 2 \cdot 0,6 + 0,8) = 0,6 \\ T_5^2 &= 0,8 + 1 \cdot 0,1 \cdot (0,6 - 2 \cdot 0,8 + 0,96) = 0,796 \\ T_6^2 &= 0,96 + 1 \cdot 0,1 \cdot (0,8 - 2 \cdot 0,96 + 0,8) = 0,928 \end{aligned}$$

Demikian perhitungan terus dilanjutkan s/d waktu yang dikehendaki (N).

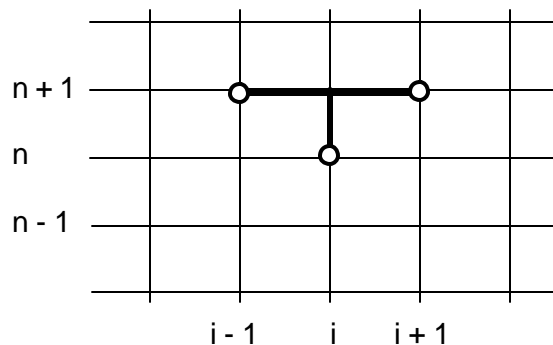
Tabel hasil skema eksplisit

i =	1	2	3	4	5	6	7
x =	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
t = 0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	0.8
t = 0,001	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.96	0.8
t = 0,002	0	0.2	0.4	0.6	0.796	0.928	0.796
t = 0,003	0	0.2	0.4	0.5996	0.7896	0.9016	0.7896
.
.
.
t = N	N	N	N	N	N	N	N

2. Penyelesaian Persamaan Parabolik dengan Skema Implisit

Dalam skema eksplisit, ruas kanan dari persamaan ditulis pada waktu n yang nilainya sudah diketahui. Sedangkan pada skema implisit, ruas kanan tersebut ditulis pada waktu $n+1$ di mana nilainya belum diketahui.

Gambar di bawah ini menunjukkan jaringan titik simpul dari skema implisit. Dengan menggunakan skema tersebut, fungsi $f(x,t)$ dan turunannya dalam ruang waktu didekati oleh bentuk berikut ini.



$$f(x, t) = f_i^n \text{ atau } = f_i^{n+1}$$

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{? t}$$

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{2 \cdot ? x}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = \frac{f_{i-1}^{n+1} - 2 \cdot f_i^{n+1} + f_{i+1}^{n+1}}{? x^2}$$

Dengan menggunakan skema di atas, maka dapat dibentuk persamaan dalam bentuk beda hingga :

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = K_i \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2 \cdot T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{1}{\Delta t} T_i^{n+1} - \frac{K_i}{\Delta x^2} T_{i-1}^{n+1} + \frac{2 \cdot K_i}{\Delta x^2} T_i^{n+1} - \frac{K_i}{\Delta x^2} T_{i+1}^{n+1} = \frac{T_i^n}{\Delta t}$$

$$-\frac{K_i}{\Delta x^2} T_{i-1}^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{2 \cdot K_i}{\Delta x^2}\right) T_i^{n+1} - \frac{K_i}{\Delta x^2} T_{i+1}^{n+1} = \frac{T_i^n}{\Delta t}$$

atau

$$A_i \cdot T_{i-1}^{n+1} + B_i \cdot T_i^{n+1} + C_i \cdot T_{i+1}^{n+1} = D_i \quad \dots\dots\dots (6.3)$$

dengan

$$A_i = -\frac{K_i}{\Delta x^2} \quad ; C_i = -\frac{K_i}{\Delta x^2}$$

$$B_i = \left(\frac{1}{\Delta t} + 2 \cdot \frac{K_i}{\Delta x^2}\right) \quad ; D_i = \frac{T_i^n}{\Delta t}$$

Apabila persamaan (6.3) ditulis untuk setiap titik hitungan dari $i = 1$ sampai M maka akan terbentuk suatu sisten persamaan linier yang dapat diselesaikan dengan menggunakan metode matriks.

Untuk :

$$i = 1 \quad ? \quad A_1 T_0 + B_1 T_1 + C_1 T_2 = D_1$$

$$i = 2 \quad ? \quad A_2 T_1 + B_2 T_2 + C_2 T_3 = D_2$$

$$i = 3 \quad ? \quad A_3 T_2 + B_3 T_3 + C_3 T_4 = D_3$$

$$i = 4 \quad ? \quad A_4 T_3 + B_4 T_4 + C_4 T_5 = D_4$$

.

.

$$i = M \quad ? \quad A_M T_{M-1} + B_M T_M + C_M T_{M+1} = D_M$$

Untuk penyederhanaan penulisan, variabel $T_{i^{n+1}}$ ditulis T_i (tanpa menulis $n+1$). Persamaan di atas dalam bentuk matrik menjadi :

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & A_4 & B_4 & C_4 & \dots\dots\dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots\dots\dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & A_M & B_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ T_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ D_M \end{bmatrix}$$

Persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan metode penyelesaian persamaan serentak seperti yang dibahas pada Bab 2 untuk mendapatkan nilai T_i ($i=1, \dots, M$).

Penyelesaian dengan menggunakan skema implisit lebih sulit dibanding dengan skema eksplisit. Kelebihan dari skema implisit adalah skema tersebut stabil tanpa syarat, langkah waktu Δt dapat diambil sembarang (besar) tanpa menimbulkan kesalahan pemotongan dalam batas-batas yang dapat diterima.

3. Penyelesaian Persamaan Eliptik

Penyelesaian dilakukan dengan mendiskretisasi suatu persamaan differensial parsial eliptik dengan kondisi batas untuk dapat ditransformasikan ke dalam suatu sistem dari N persamaan dengan N bilangan anu.

Penyelesaian persamaan eliptik dilakukan dengan langkah-langkah berikut ini.

1. Membuat jaringan titik simpul di dalam seluruh bidang yang ditinjau dan batas-batasnya.
2. Pada setiap titik dalam bidang tersebut dibuat turunan-turunannya dalam bentuk beda hingga.
3. Ditulis nilai-nilai fungsi pada semua titik di batas keliling bidang dengan memperhatikan kondisi batas.

Dari persamaan bentuk eliptik berikut :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Sehingga :

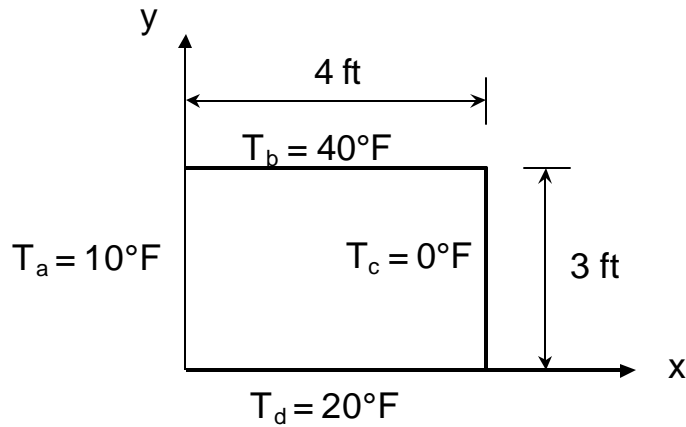
$$\frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1}}{\Delta y^2} = 0$$

Untuk $\Delta x = \Delta y$, maka persamaan di atas menjadi :

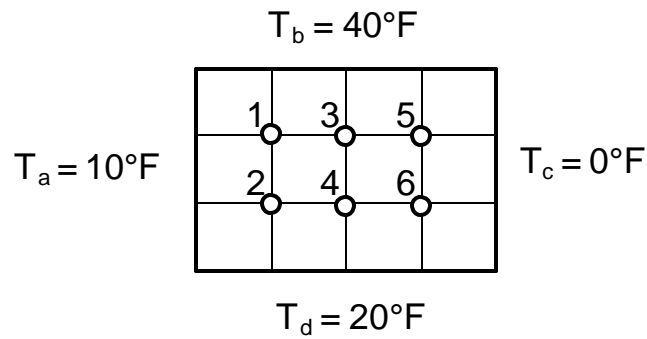
$$4\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j} - \phi_{i+1,j} - \phi_{i,j-1} - \phi_{i,j+1} = 0$$

Contoh Soal :

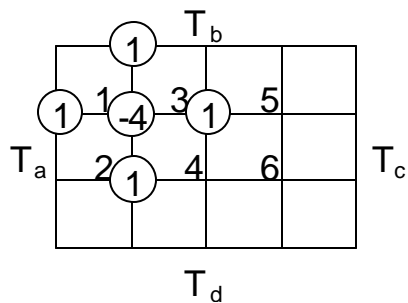
Determine the steady state temperature of the following plate using $a = 1$ and $\Delta x = 1$ ft.



Jawab :

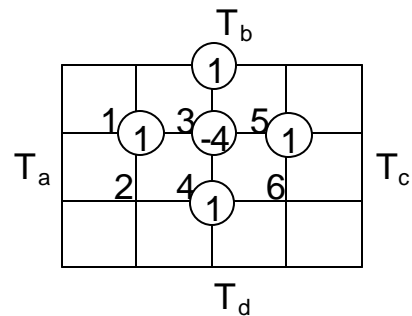


? Node 1



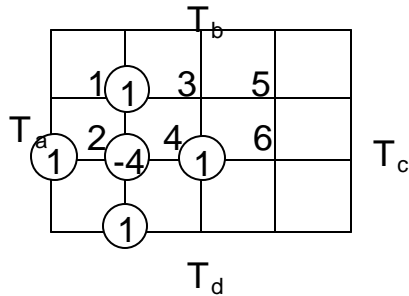
$$10 + 40 - 4T_1 + T_2 + T_3 = 0$$

? Node 3



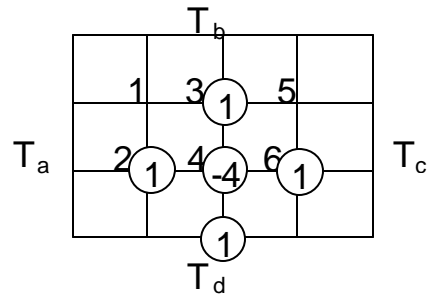
$$40 + T_1 - 4T_3 + T_4 + T_5 = 0$$

? Node 2



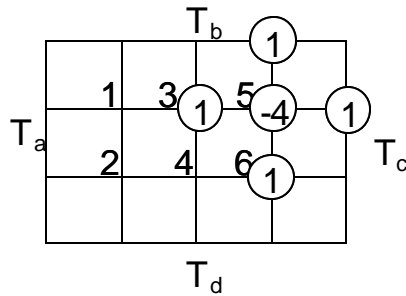
$$10 + 20 + T_1 - 4T_2 + T_4 = 0$$

? Node 4



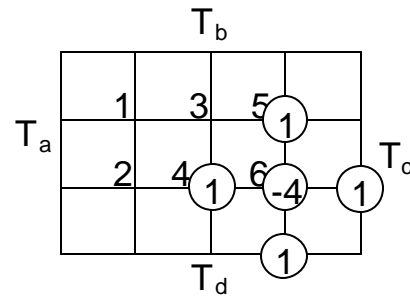
$$20 + T_2 + T_3 - 4T_4 + T_6 = 0$$

? Node 5



$$40 + T_3 - 4T_5 + T_6 = 0$$

? Node 6



$$20 + T_4 + T_5 - 4T_6 = 0$$

Sehingga hasil persamaan-persamaan tersebut dapat dibentuk dalam suatu matrik :

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} T_1 &= 23,561 \text{ } ^\circ\text{F} \\ T_2 &= 18,344 \text{ } ^\circ\text{F} \\ T_3 &= 25,901 \text{ } ^\circ\text{F} \\ T_4 &= 19,814 \text{ } ^\circ\text{F} \\ T_5 &= 20,228 \text{ } ^\circ\text{F} \\ T_6 &= 15,010 \text{ } ^\circ\text{F} \end{aligned}$$